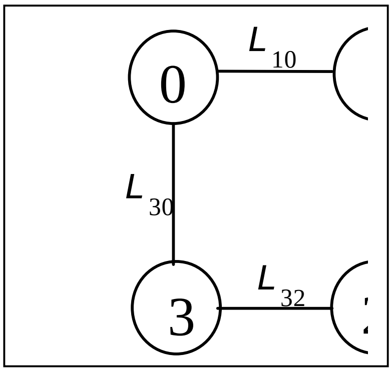
TD1 : ELEMENTS DE CORRIGE

1 ETUDE DES LIAISONS

Liaisons entre solides



L_{10} : Pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$
L_{32} : Rotule de centre C
L_{30} : Plane de normale $(D, \vec{x}_3)$
L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B, \vec{x}_0)$

nb de solides n = 3
nb de liaisons l = 4
nb de cycles indépéndants $\gamma = 1$

1.1 Etude géométrique

1.1.1 FERMETURE VECTORIELLE

$$\begin{cases} AB + BC + CD + DE + EA = \vec{0} \\ R\vec{y}_1 - \lambda\vec{x}_0 - h\vec{x}_3 - v\vec{y}_0 - w\vec{z}_3 + d\vec{x}_0 = \vec{0} \end{cases} \qquad (1)$$

1.1.2 RESOLUTION

<u>Projection de (1) sur</u> R $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{cases} -\lambda - h\cos\alpha + w\sin\alpha + d = 0 \\ R\cos\theta_{01} - v = 0 \\ R\sin\theta_{01} + h\sin\alpha - w\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

1.1.3 BILAN

paramètres géométriques: λ ; h ; v ; w ; d; α ; θ_{01} N=7
rang géométrique: r=3
paramètres géométriques donnés: h ; d ; α ; θ_{01}
paramètres géométriques inconnus : w ; v; λ

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Finalement, il vient (si $\cos\alpha \neq 0$)

$$w = \frac{R\sin\theta_{01}}{\cos\alpha} + h\,tg\alpha$$
$$v = R\cos\theta_{01}$$
$$\lambda = d - h\cos\alpha + h\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + R\sin\theta_{01}tg\alpha$$

1.1.4 SIGNIFICATION GEOMETRIQUE

Remarque : La vitesse instantanée du point C lié au piston 2 en mouvement par rapport au barillet 1 s'écrit :

$$\vec{V}(C,2/1) = \left(\frac{dBC}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d(-\lambda\vec{x}_1)}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\overline{V}(C,2/1) = -\frac{d\lambda}{dt} = -R\omega_{10}tg\alpha\cos\theta_{01}$$

2 ETUDE CINEMATIQUE

$$\{V(S_1/S_0)\}_C + \{V(S_2/S_1)\}_C + \{V(S_3/S_2)\}_C - \{V(S_3/S_0)\}_C = \{0\}$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_3/S_2) - \vec{\Omega}(S_3/S_0) = \vec{0} & (3) \\ \vec{V}(C,S_1/S_0) + \vec{V}(C,S_2/S_1) + \vec{V}(C,S_3/S_2) - \vec{V}(C,S_3/S_0) = \vec{0} & (4) \end{cases}$$

Calcul de $\vec{V}(C,S_1/S_0) = \vec{V}(A,S_1/S_0) + CA \wedge \vec{\Omega}(S_1/S_0)$

donc $\vec{V}(C,S_1/S_0) = [\lambda\vec{x}_1 - R\vec{y}_1] \wedge \alpha_{10}\vec{x}_1 = R\alpha_{10}\vec{z}_1$

*<u>*Projections de (3) et (4) sur R_0*</u>

(1)	α_{10}	$+$	α_{21}	$+$	α_{32}	$-$	$\alpha_{30}\cos\alpha$	$=0$
(2)					β_{32}			$=0$
(3)					γ_{32}	$+$	$\alpha_{30}\sin\alpha$	$=0$
(4)			u_{21}			$+$	$w_{30}\sin\alpha$	$=0$
(5)	$R\alpha_{10}\sin\theta_{01}$					$+$	v_{30}	$=0$
(6)	$R\alpha_{10}\cos\theta_{01}$					$-$	$w_{30}\cos\alpha$	$=0$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

**Bilan*

Inconnues cinématiques: α_{32}; β_{32}; γ_{32};u_{21}; v_{30}; w_{30};α_{10}; α_{21}; α_{30} $N_c = 9$
Rang cinématique: $r_c = 6$
Mobilité du mécanisme $m = N_c - r_c = 3$ $(m_u=1;\ m_i=2)$
Paramètres cinématiques donnés: α_{10}; α_{21}; α_{30}
Paramètres cinématiques inconnus: α_{32}; β_{32}; γ_{32};u_{21}; v_{30}; w_{30}

**Système linéaire associé*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{(A)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{32} \\ \beta_{32} \\ \gamma_{32} \\ u_{21} \\ v_{30} \\ w_{30} \end{bmatrix}}_{(X)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{30}\cos\alpha \\ 0 \\ -\alpha_{30}\sin\alpha \\ 0 \\ R\alpha_{10}\sin\theta_{01} \\ R\alpha_{10}\cos\theta_{01} \end{bmatrix}}_{(B)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha_{32} &= -\alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{30}\cos\alpha \\ \beta_{32} &= 0 \\ \gamma_{32} &= -\alpha_{30}\sin\alpha \\ u_{21} &= -R\alpha_{10}\mathrm{tg}\alpha\cos\theta_{01} \\ v_{30} &= -R\alpha_{10}\sin\theta_{01} \\ w_{30} &= -R\alpha_{10}\frac{\cos\theta_{01}}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

si det A= - $\cos\alpha \neq 0$

3 ETUDE DES INTER-EFFORTS

Formule de mobilité $h = m + 6 - N_C$
soit $h = 2 + 6 - (1 + 2 + 5) = 0$

 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

MECANISMES : ETUDE DES CHAINES FERMEES

TD1 : Corrigé

**Torseurs statiques associés aux liaisons*

$$\{T(S_0 \to S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{T(S_2 \to S_1)\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\{T(S_3 \to S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{T(S_0 \to S_3)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & M_{03} \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_{R_4}$$

$$\{T(ext \to S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{E\to 1} & L_{E\to 1} \\ Y_{E\to 1} & M_{E\to 1} \\ Z_{E\to 1} & N_{E\to 1} \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{T(ext \to S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{E\to 2} & L_{E\to 2} \\ Y_{E\to 2} & 0 \\ Z_{E\to 2} & N_{E\to 2} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

**Application du P.F.S*

**Isolement de* S_1

$$\{T(S_0 \to S_1)\}_A + \{T(S_2 \to S_1)\}_A + \{T(ext \to S_1)\}_A = 0$$

soit
$$\begin{cases} \vec{R}(S_0 \to S_1) + \vec{R}(S_2 \to S_1) + \vec{R}(ext \to S_1) = \vec{0} \\ \vec{M}(A, S_0 \to S_1) + \vec{M}(A, S_2 \to S_1) + \vec{M}(A, ext \to S_1) = \vec{0} \end{cases}$$

Calcul de $\vec{M}(A, S_2 \to S_1) = \vec{M}(C, S_2 \to S_1) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}(S_2 \to S_1)$

$$\vec{M}(A, S_2 \to S_1) = \begin{vmatrix} 0 \\ M_{21} \\ N_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda \\ R\cos\theta_{01} \\ R\sin\theta_{01} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}(A, S_2 \to S_1) = \begin{bmatrix} RZ_{21}\cos\theta_{01} - RY_{21}\sin\theta_{01} \\ M_{21} + \lambda Z_{21} \\ N_{21} - \lambda Y_{21} \end{bmatrix}_{R_0}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Finalement, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{array}{ll} (1) & \\ (2) & \\ (3) & \\ (4) & \\ (5) & \\ (6) & \end{array} \begin{cases} X_{01} & & & = -X_{E\to 1} \\ Y_{01} & + & Y_{21} & = -Y_{E\to 1} \\ Z_{01} & + & Z_{21} & = -Z_{E\to 1} \\ & & RZ_{21}\cos\theta_{01} - RY_{21}\sin\theta_{01} & = -L_{E\to 1} \\ M_{01} & + & M_{21} + \lambda Z_{21} & = -M_{E\to 1} \\ N_{01} & + & N_{21} - \lambda Y_{21} & = -N_{E\to 1} \end{cases}$$

**Isolement de* S_2

$$-\{T(S_2 \to S_1)\}_C + \{T(S_3 \to S_2)\}_C + \{T(ext \to S_2)\}_C = 0$$

soit $\begin{cases} -\vec{R}(S_2 \to S_1) + \vec{R}(S_3 \to S_2) + \vec{R}(ext \to S_2) = \vec{0} \\ -\vec{M}(C, S_2 \to S_1) + \vec{M}(C, S_3 \to S_2) + \vec{M}(C, ext \to S_2) = \vec{0} \end{cases}$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{l} (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{array} \begin{cases} & & X_{32} & = & -X_{E\to 2} \\ -Y_{21} & + & Y_{32} & = & -Y_{E\to 2} \\ -Z_{21} & + & Z_{32} & = & -Z_{E\to 2} \\ 0 & & & = & 0 \\ -M_{21} & & & = & -M_{E\to 2} \\ -N_{21} & & & = & -N_{E\to 2} \end{cases}$$

**Isolement de* S_3

$$\{T(S_0 \to S_3)\}_C - \{T(S_3 \to S_2)\}_C = 0$$

soit $\begin{cases} \vec{R}(S_0 \to S_3) - \vec{R}(S_3 \to S_2) = \vec{0} \\ \vec{M}(C, S_0 \to S_3) - \vec{M}(C, S_3 \to S_2) = \vec{0} \end{cases}$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant:

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\begin{cases} -X_{32} + X_{03}\cos\alpha - N_{03}\sin\alpha = 0 & (13)\\ -Y_{32} = 0 & (14)\\ -Z_{32} - X_{03}\sin\alpha = 0 & (15)\\ 0 = 0 & (16)\\ M_{03} = 0 & (17)\\ N_{03}\cos\alpha = 0 & (18)\end{cases}$$

*__Bilan__

Inconnues statiques d'inter-efforts	$N_s = \sum_{i=1}^{n+1} n_{si} = 15$
Mobilité du mécanisme	m = 3
Rang statique	r_s = 6n-m=15
Degré d'hyperstaticité	$h=N_s-r_s=0$

__Résolution__

$$\begin{aligned} X_{01} &= -X_{E\to1}\\ Y_{01} &= -Y_{E\to1} - Y_{E\to2}\\ Z_{01} &= -Z_{E\to1} - Z_{E\to2} - X_{E\to2}tg\alpha\\ M_{01} &= -M_{E\to1} - M_{E\to2} - \lambda[Z_{E\to2} + X_{E\to2}tg\alpha]\\ N_{01} &= -N_{E\to1} - N_{E\to2} + \lambda Y_{E\to2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{32} &= -X_{E\to2}\\ Y_{32} &= 0\\ Z_{32} &= X_{E\to2}tg\alpha\end{aligned} \qquad \begin{aligned} Y_{21} &= Y_{E\to2}\\ Z_{21} &= [Z_{E\to2} + X_{E\to2}tg\alpha]\\ M_{21} &= M_{E\to2}\\ N_{21} &= N_{E\to2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned} N_{03} &= 0\\ M_{03} &= 0\\ X_{03} &= -\frac{X_{E\to2}}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

__Relation entrée sortie__

$$\boxed{-L_{E\to1} = R[Z_{E\to2} + X_{E\to2}tg\alpha]\cos\theta_{01} - RY_{E\to2}\sin\theta_{01}}$$

__Cas particulier__:

$$\begin{aligned} X_{E\to2} &= pS\\ X_{E\to2} &= 0\\ X_{E\to2} &= 0\end{aligned} \qquad \boxed{-L_{E\to1} = RpStg\alpha\cos\theta_{01}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.